9.18 Def: Spur von $A=(a_{ij}) \in Mat_K(n \times n)$

"trace"

$$tr\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Spur von Endomorphismus $f \circlearrowright V$

$$tr(f) := tr\left({}_{B}M_{B}(f)\right)$$

für eine Basis B von f.
(hängt nicht von der Wahl von B ab, siehe 9.20 unten)

Struktur des charakteristischen Polynoms:

9.19 Notiz:

$A \in Mat_K(n \times n)$	$V \circlearrowleft f$ Endom.
χ_A	χ_f

$$\chi_A = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0 = \chi_f.$$

$\deg(\chi_A) = n$	$\deg(\chi_f) = \dim V$
$c_n = (-1)^n$	$c_{\dim V} = (-1)^{\dim V}$
$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(A)$	$c_{\dim V - 1} = (-1)^{\dim V - 1} tr(f)$
$c_0 = \det(A)$	$c_0 = \det(f)$

(Andeutung: $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - X \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} - X) \cdot (a_{22} - X) - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= (-1)^2 \cdot X^2 + (-1)^1 \cdot (a_{11} + a_{22}) X + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= (-1)^2 \cdot X^2 + (-1) \cdot tr(A) \cdot X + \det(A).$$

Allgemeines n: Schreibe χ_A explizit mit Leibnizformel aus und argumentiere ähnlich.)

9.20 Bonus-Satz:
Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

Beweis:
Folgt aus Notiz 9.14 (ähnliche Matrizen haben dasselbe char. Polynom) und linker Hälfte von Notiz 9.19. $\square$

Jedenfalls:

$$\chi_f = (-1)^n X^n + tr(f) \cdot X^{n-1} + \dots + \det(f)$$

mit $n = \dim V$. Andererseits können wir nach Satz 3.19 χ_f schreiben als

$$(*) \quad \chi_f = (X - a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X - a_\ell)^{n_\ell} \cdot Q,$$

wobei $a_i \in K$ die verschiedenen Nullstellen von χ_f sind und $Q \in K[X]$ Polynom ohne Nullstellen ist.

9.21 Def: Seien $a_1, \dots, a_\ell$ die versch. Nullstellen von χ_f, also die EW von f.

algebraische Vielfachheit von a_i
$:=$ Exponent n_i in $(*)$

geometrische Vielfachheit von a_i
$:= \dim \operatorname{Eig}(f; a_i)$

9.22 Satz: Für jeden EW a von f ist

$$\text{geometrische Vielfachheit von } a \;\leq\; \text{algebraische Vielfachheit von } a$$

Beweis:
Wähle Basis $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ von $\mathrm{Eig}(f; a)$.
(also $m =$ geometrische Vielfachheit von a)
Ergänze diese zu einer Basis

$$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \dots, \underline{b}_n) \text{ von } V.$$

Dann ist ${}_B M_B(f)$ von folgender Gestalt:

$$ {}_B M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{matrix} & * \\ \hline 0 & M' \end{array} \right) $$

$f(\underline{b}_1) = a \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{b}_n$ (siehe Satz 7.4)

Somit

$$\chi_f = (a - X)^m \cdot \chi_{M'}$$

z.B. Laplace

könnte noch weitere Faktoren $(a-X)$ enthalten (oder auch nicht)

$\square$

Beispiele:

a) $\mathbb{R}^2 \circlearrowright f \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} = (2-x)^1 \cdot (3-x)^1$$

$$\mathrm{Eig}(f;2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(f;3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

EW	alg. V.	geom. V.
2	1	1
3	1	1

b) $\mathbb{R}^2 \circlearrowright g \qquad M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi_g = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2$$

$x=2$

$$\mathrm{Eig}(g;2) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

EW	alg. V.	geom. V.
2	2	1

c) $\mathbb{R}^2 \circlearrowleft h \quad M(h) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_h = \det \begin{pmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{pmatrix} = X^2 + 1$$

hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, also hat h keine EW.

d) $\mathbb{C}^2 \circlearrowleft j \quad M(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_j = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$$

EW	alg. V.	geom. V.
i	1	1
$-i$	1	1

9.23 Algebraisches / Starkes Diagonalisierbarkeitskriterium

V endlich-dim. VR, $V \xrightarrow{f} V$ Endom.

f ist diagonalisierbar

$\iff \begin{cases} \chi_f \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \\ \quad (\text{d.h. } \chi_f = (X-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X-a_\ell)^{n_\ell} \cdot q \\ \qquad\qquad \text{für ein } q \in K^\times) \\ \text{und für jeden EW } a \text{ von } f \text{ gilt:} \\ \quad \begin{matrix}\text{geometrische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a\end{matrix} = \begin{matrix}\text{algebraische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a\end{matrix} \end{cases}$

Beweis:

$(\Rightarrow)$

$$ {}_BM_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & \qquad\qquad\qquad & n_\ell \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_1 & & & & & & \\ & & & a_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_2 & & & \\ & & & & & & a_\ell & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & a_\ell \end{pmatrix} \end{array}, $$

also $\chi_f = (a_1 - X)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (a_\ell - X)^{n_\ell}$

mit $n_i = \dim \operatorname{Eig}(f; a_i)$.

($\Leftarrow$) Nach Annahme ist

$$\chi_f = (a_1 - X)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (a_\ell - X)^{n_\ell} \cdot q$$

für $q \in K^\times$ mit $n_i := \dim \operatorname{Eig}(f; a_i)$.

Daher

$$\sum_{i=1}^{\ell} n_i \underset{\text{Gradformel 3.15}}{=} \deg(\chi_f) \underset{\text{Notiz 9.19}}{=} \dim V.$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \dim \operatorname{Eig}(f; a_i) = \sum_{i=1}^{\ell} n_i$$

Verwende nun Kriterium 9.10. $\square$

(a) f diagonalisierbar

$\Updownarrow$

...

$\Updownarrow$

(c) $\sum_{i=1}^{\ell} \dim \operatorname{Eig}(f; a_i) = \dim V$